



# **МАТЕРИАЛЫ**

**РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

**«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ,  
МЕХАНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»**

**ПОСВЯЩЕННОЙ 90-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ  
НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА УЗБЕКИСТАНА**

**(8 мая 2008 г.)**

Ташкент  
2008

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Абулов М.О.

В области  $Q = \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < 1\}$  рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{tt} - u_{xx}) - |u|^\rho u = f(x, t) \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0, \quad (3)$$

где, постоянная  $\rho \geq -1$ ,  $f(x, t)$  — заданная функция. Отметим, что близкие задачи изучены в [1,2]. Обозначим через  $S_L$  класс функций, непрерывно дифференцируемых 4 раза в области  $[0,1]$  и удовлетворяющих условию (3). Обозначим через  $W(0, 1), W_1(0, 1)$  пространства, являющиеся пополнением класса  $S_L$  соответственно по нормам

$$\|u\|_{W(0,1)}^2 = \int_0^1 (u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2 + u^{\rho+2}) dx, \|u\|_{W_1(0,1)}^2 = \int_0^1 (u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xxx}^2) dx.$$

**Теорема.** Пусть  $f, f_t \in L_2(Q), u_0(x) \in W(0, 1), u_1(x) \in W_1(0, 1) \cap L_{2(\rho+1)}(0, 1)$ . Тогда существует единственное решение задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Для доказательства существования решения задачи (1)-(3) воспользуемся методом Галеркина. Пусть  $w_j$  — собственные функции задачи Дирихле для оператора  $\Delta$ :

$$\Delta w_j = -\lambda_j w_j, j = 1, 2, \dots, w_j|_{x=0} = w_j|_{x=1} = 0 \quad (4)$$

Мы предполагаем, что

$$w_j \in W_2^4(0, 1) \cap L_{2(\rho+1)}(0, 1) \quad (5)$$

Приближенные решения задачи (1)-(3) ищем в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j(x).$$

где  $g_{jm}(t)$  определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int_0^1 (u_{m t t t x x} - u_{m x x x x x} - |u_m|^\rho u_m) w_j dx = \int_0^1 f w_j dx, j = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

с начальными условиями

$$u_m(0) = u_{0m}; u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j(x) \rightarrow u_0(x), W(0, 1), \quad (7)$$

$$u_m(0) = u_{1m}; u_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j(x) \rightarrow u_1(x), W_1(0, 1) \cap L_{2(\rho+1)}(0, 1), \quad (8)$$

Система (6)-(8) разрешима локально на некотором интервале  $[0, t_m]$ . Априорные оценки, полученные ниже, показывают, что задача (6)-(8) разрешима на интервале  $[0, T]$ . Умножим (6) на  $-g_{jm}''(t)$ , суммируя по  $j$ , получаем

$$-\int_0^1 u_{mtttx} u_{mt} dx + \int_0^1 u_{mtxxx} u_{mt} dx + \int_0^1 |u_m|^\rho u_m u_{mt} dx = -\int_0^1 f u_{mt} dx \quad (9)$$

Заметим, что в силу (3)

$$\int_0^1 u_{mt}^2 dx \leq C \int_0^1 u_{mtx}^2 dx \quad (10)$$

Из (9), интегрируя по частям в силу условия (2), (3) и неравенства Коши, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 (u_{mtx}^2 + u_{mxx}^2) dx \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_m|^\rho dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_{mt}^2 dx \quad (11)$$

Отсюда, в силу (10), (2) и леммы Гронуолла, получим

$$\int_0^1 (u_{mtx}^2 + u_{mxx}^2) dx + \int_0^1 |u_m|^\rho dx \leq C \left( \int_0^1 f^2 dx + \int_0^1 (u_{0mt}^2 + u_{0mxx}^2 + |u_{0m}|^\rho) dx \right)$$

Из этого, в силу условия теоремы имеем

$$\int_0^1 (u_{mtx}^2 + u_{mxx}^2) dx + \int_0^1 |u_m|^\rho dx \leq C \quad (12)$$

Из (6) в силу (4) следует, что

$$\int_0^1 u_{mtttx}(0) w_{jxx}(x) dx = \int_0^1 (f(x, 0) + u_{0mtxxx} + |u_{0m}|^\rho u_{0m}) w_{jxx} dx$$

Отметим, что в силу условия теоремы  $f(x, 0) \in L_2(0, 1)$ ,  $|u_{0mtxxx}| \leq C$ ,  $|u_{0m}|^\rho u_{0m} \in L_2(0, 1)$ . Отсюда, умножая (12) на  $g_{jm}''(0)$ , суммируя по  $j$ , получим

$$\int_0^1 u_{mtttx}^2(0) dx \leq \int_0^1 (|f(x, 0)| + |u_{0mtxxx}| + |u_{0m}|^\rho u_{0m}) u_{mtttx}(0) dx$$

Откуда,

$$|u_{mtttx}(0)| \leq C \quad (13)$$

Дифференцируя (6) по  $t$ , в силу (4), имеем

$$\int_0^1 (u_{mtttx} - u_{mtxxx} - (\rho + 1)|u_m|^\rho u_{mt}) w_{jxx} dx = \int_0^1 f_1 w_{jxx} dx, \quad (14)$$

Умножая (14) на  $w_{jxx}$  и суммируя по  $j$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{mtttx}^2 + u_{mtxxx}^2) dx = \int_0^1 (f_1 u_{mtttx} - (\rho + 1)|u_m|^\rho u_{mt} u_{mtttx}) dx$$

Отсюда, аналогично как в [1], в силу неравенства Гельдера, леммы Гронуолла и по условию теоремы, имеем

$$\int_0^1 (u_{mtttxx}^2 + u_{mtxxx}^2) dx \leq C \quad (15)$$

(15) В силу (15) и  $|u|^\rho u \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1))$ ,  $f \in l_2(Q)$ , из уравнения (1) следует, что

$$u_{xxxx} = u_{ttxx} - |u|^\rho u - f \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)) \quad (16)$$

Благодаря (12), (15), (16) имеем следующее:

$u_{mtttxx}$  ограничены в  $L_\infty(0, T; L_2(0, 1))$

$u_{mxxxx}$  ограничены в  $L_\infty(0, T; L_2(0, 1))$

$u_m$  ограничены в  $L_p(Q)$

$u_{mt}$  ограничены в  $L_\infty(0, T; L_2(0, 1))$  Отсюда следует, что мы можем из последовательности  $u_m$  выделить такую подпоследовательность  $u_N$ , что

$u_N \rightarrow u^*$ - слабо  $L_\infty(0, T; W(0, 1))$

$u'_N \rightarrow w^*$ -слабо  $L_\infty(0, T; W_1(0, 1))$

$|u_N|^\rho u_N \rightarrow \varphi^*$ - слабо  $L_q(Q)$

Аналогично, как в [1] можно показать, что

$$\varphi = |u_N|^\rho u_N, \quad \int_0^1 (u_{ttxx} - u_{xxxx} - |u|^\rho u) w_j dx = \int_0^1 f w_j dx,$$

для любого фиксированного  $j$ . Отсюда, ввиду плотности "базиса"  $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$ , имеем  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{tt} - u_{xx}) - |u|^\rho u = f(x, t)$  п.в. в  $Q$ . Теперь докажем, что решения задачи (1) - (3) единственно. Пусть  $u$  и  $v$  - два решения задачи (1) - (3), тогда для разности  $w = u - v$  имеем:

$$w_{ttxx} - w_{xxxx} = |v|^\rho v - |u|^\rho u \quad (17)$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = w(1, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(1, t) = 0 \quad (18)$$

Умножаем обе части равенства (17) на  $w_t$ ; тогда получим следующие равенства

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (w_{tx}^2 + w_{xx}^2) dx = \int_0^1 (|v|^\rho v - |u|^\rho u) w_t dx \quad (19)$$

Правая часть (19) по абсолютной величине не превосходит (см [1], стр. 28)  $C(\int_0^1 w^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 w_t^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ . Тогда из (19) в силу (10) и леммы Гронуолла приходим к неравенству  $\int_0^1 (w_{tx}^2 + w_{xx}^2) dx \leq 0$ . Следовательно,  $w = 0$  в  $Q$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Аналогично, как в [2] можно показывать пример, что условия теоремы являются существенными для единственности решения задачи (1)-(3).

### Библиографический список

1. Ж.-Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. Мир, 1972 г. 588 с.
2. М. О. Абулов. Краевая задача для одного нелинейного уравнения третьего порядка. Т. Труды международной конференции "Современные проблемы математической физики и информационных технологий". 2005 г. 237-241 с.
3. Врагов В. А. Краевая задача для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. НГУ. 1983. 82 с.

## Содержание

<i>Абдушукуров А.А., Зупаров Т.М., Джамирзаев А.А., Исмагуллаев Ш.А.</i>	
<i>Краткий очерк научной и педагогической деятельности Т.А.Азларова</i>	6
<i>Абдалимов Б., Вахобов В. Об оптимальных планах контроля по многомерному количественному признаку</i>	9
<i>Абдиева Г.Б., Мавлянов Т.М., Дремова Н.В. К определению демпфирующих свойств текстильных материалов</i>	11
<i>Абдуқодиров А.А. Об одном способе построения корректирующих тензоров напряжений для двухсвязных областей в среде MAPLE</i>	12
<i>Абдусаттаров А. Переменное нагружение и повреждаемость элементов конструкций</i>	13
<i>Абдушукуров А.А., Мирзаахмедов Н.Б. Экспоненциальные функции интенсивности отказов и их оценивание в модели конкурирующих рисков</i>	14
<i>Абулов М.О. Краевая задача для одного нелинейного уравнения четвертого порядка</i>	17
<i>Адашев Ж.К. Классификация пяти и шести мерных комплексных филиформных алгебр Лейбница</i>	20
<i>Азимов Ж.Б., Жумакулов Х.К. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона с убывающей иммиграцией, зависящий от состояния</i>	22
<i>Азимов Ж.Б., Форманова Т.А. Об асимптотическом поведении критических ветвящихся процессов с взаимодействием частиц</i>	24
<i>Аликулов Э.О. Теорема о голоморфности функции с прямолинейными множествами моногенности</i>	25
<i>Алоев Р.Д., Худайбергенов М.У. Модифицированная разностная схема с ограничителем наклона</i>	26
<i>Аманов Д, Юлдашева А.В. Обратная задача для уравнения четного порядка</i>	30
<i>Апаков Ю.П. Решение одной задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками</i>	32
<i>Арипов М.М., Ходиев Ш.И. К содержанию курса Информатика</i>	36
<i>Асланов Ж.О. Об одном свойстве некоторой динамической системы на торе <math>T^n</math></i>	38
<i>Атажанов Б., Хайдаров И.К., Носиров М.И. Влияние связей на устойчивость установившихся движений</i>	40
<i>Атахужаев А.А. Распределение числа пересечений полосы для обобщенного процесса восстановления</i>	42
<i>Ахаткулов Х.А. Ренормализации гомеоморфизмов окружности с изломами</i>	44
<i>Бакирова А.Ю. Опыт, проблемы и перспективы использования информационных технологий</i>	46
<i>Балтаева У.И. Аналог задачи Геллерстедта для уравнения третьего порядка с нагруженным параболо-гиперболическим оператором</i>	47
<i>Бегматов А.Б. О диффузионной модели выветривания почвогрунтов</i>	51
<i>Бегматов А. О развитии механики в Национальном Университета Узбекистана им.М.Улугбека</i>	51