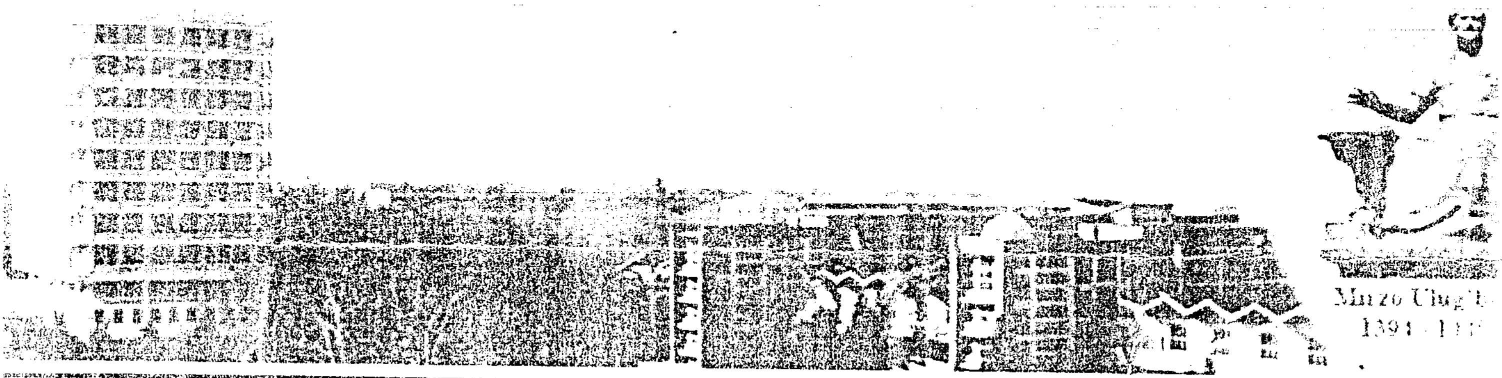

МАТЕРИАЛЫ

РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ПОСВЯЩЕННОЙ 90-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА УЗБЕКИСТАНА

(8 мая 2008 г.)

Ташкент
2008

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Абулов М.О.

В области $Q = \{(x,t) : 0 < t < T, 0 < x < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{tt} - u_{xx}) - |u|^\rho u = f(x,t) \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где, постоянная $\rho \geq -1, f(x,t)$–заданная функция. Отметим, что близкие задачи изучены в [1,2]. Обозначим через S_L класс функций, непрерывно дифференцируемых 4 раза в области [0,1] и удовлетворяющих условию (3). Обозначим через $W(0,1), W_1(0,1)$ пространства, являющиеся пополнением класса S_L соответственно по нормам

$$\|u\|^2_{W(0,1)} = \int\limits_0^1 (u^2_{xx} + u^2_{xxx} + u^2_{xxxx} + u^{\rho+2})dx, \|u\|^2_{W_1(0,1)} = \int\limits_0^1 (u^2_x + u^2_{xx} + u^2_{xxx})dx.$$

Теорема. Пусть , $f, f_t \in L_2(Q), u_9(x) \in W(0,1), u_1(x) \in W_1(0,1) \cap L_{2(\rho+1)}(0,1)$.Тогда существует единственное решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Для доказательства существования решения задачи (1)-(3) воспользуемся методом Галеркина. Пусть w_j - собственные функции задачи Дирихле для оператора $\triangle$:

$$\triangle w_j = -\lambda_j w_j, j = 1,2,..., w_j|_{x=0} = w_j|_{x=1} = 0 \tag{4}$$

Мы предполагаем, что

$$w_j \in W^4_2(0,1) \cap L_{2(\rho+1)}(0,1) \tag{5}$$

Приближенные решения задачи (1)-(3) ищем в виде

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j(x).$$

где $g_{jm}(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int\limits_0^1 (u_{mttxx} - u_{mxxxx} - |u_m|^\rho u_m) w_j dx = \int\limits_0^1 f w_j dx, j = 1,2,...,m \tag{6}$$

с начальными условиями

$$u_m(0) = u_{0m}; u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j(x) \to u_0(x), W(0,1), \tag{7}$$

$$u'_m(0) = u_{1m}; u_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j(x) \to u_1(x), W_1(0,1) \cap L_{2(\rho+1)}(0,1), \tag{8}$$

Система (6)-(8) разрешима локально на некотором интервале $[0, t_m]$. Априорные оценки, полученные ниже, показывают, что задача (6)-(8) разрешима на интервале [0,T]. Умножим (6) на - $g'_{jm}(t)$, суммируя по j , получаем

$$-\int_0^1 u_{mttxx}u_{mt}dx + \int_0^1 u_{mxxxx}u_{mt}dx + \int_{0}^{1} |u_m|^\rho u_m u_{mt}dx = -\int_0^1 f u_{mt}dx \tag{9}$$

Заметим, что в силу (3)

$$\int_0^1 u_{mt}^2 dx \le C\int_0^1 u_{mtx}^2 dx \tag{10}$$

Из (9), интегрируя по частям в силу условии (2),(3) и неравенства Коши , имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_0^1 (u_{mtx}^2 + u_{mxx}^2)dx) + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^1 |u_m|^\rho dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 f^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u_{mt}^2 dx \tag{11}$$

Отсюда, в силу (10),(2) и леммы Гронуолла, получим

$$\int_0^1 (u_{mtx}^2 + u_{mxx}^2)dx + \int_0^1 |u_m|^\rho dx \le C(\int_0^1 f^2 dx + \int_0^1 (u_{1mx}^2 + u_{0mxx}^2 + |u_{0m}|^\rho)dx)$$

Из этого , в силу условии теоремы имеем

$$\int_0^1 (u_{mtx}^2 + u_{mxx}^2)dx + \int_0^1 |u_m|^\rho dx \le C \tag{12}$$

Из (6) в силу (4) следует, что

$$\int_0^1 u_{mttxx}(0)w_{jxx}(x)dx = \int_0^1 (f(x,0) + u_{0mxxxxx} + |u_{0m}|^\rho u_{0m})w_{jxx}dx$$

Отметим, что в силу условии теоремы $f(x,0) \in L_2(0,1), |u_{0mxxxx}| \le C, |u_{0m}|^\rho u_{0m} \in L_2(0,1)$. Отсюда, умножая (12) на $g''_{jm}(0)$,, суммируя по j , получим

$$\int_0^1 u_{mttxx}^2(0)dx \le \int_0^1 (|f(x,0)| + |u_{0mxxxx}| + |u_{0m}|^\rho u_{0m})u_{0mttxx}(0)dx$$

Откуда,

$$|u_{mttxx}(0)| \le C \tag{13}$$

Дифференцируя (6) по t, в силу (4) , имеем

$$\int_0^1 (u_{mtttxx} - u_{mtxxxx} - (\rho+1)|u_m|^\rho u_{mt})w_{jxx}dx = \int_0^1 f_1 w_{jxx}dx, \tag{14}$$

Умножая (14) на и суммируя по j , получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (u_{mtttxx}^2 + u_{mtxxxx}^2)dx = \int_0^1 (f_1 u_{mtttxx} - (\rho+1)|u_m|^\rho u_{mt}u_{mttxx}dx$$

Отсюда , аналогично как в [1], в силу неравенства Гельдера, леммы Гроноулла и по условию теоремы, имеем

$$\int_0^1 (u_{mtttxx}^2 + u_{mtxxx}^2)dx \leq C \qquad (15)$$

(15) В силу (15) и $|u|^\rho u \in L_\infty(0,T;L_2(0,1)), f \in l_2(Q)$, из уравнения (1) следует, что

$$u_{xxxx} = u_{ttxx} - |u|^\rho u - f \in L_\infty(0,T;L_2(0,1)) \qquad (16)$$

Благодаря (12),(15),(16) имеем следующее:

u_{mttxx} ограничены в $L_\infty(0,T;L_2(0,1))$

u_{mxxxx} ограничены в $L_\infty(0,T;L_2(0,1))$

u_m ограничены в $L_p(Q)$

u_{mt} ограничены в $L_\infty(0,T;L_2(0,1))$ Отсюда следует, что мы можем из последовательности u_m выделить такую подпоследовательность u_N, что

$u_N \to u$*- слабо $L_\infty(0,T;W(0,1))$

$u'_N \to u'$ *-слабо $L_\infty(0,T;W_1(0,1))$

$|u_N|^\rho u_N \to \varphi$ *- слабо $L_q(Q)$

Аналогично, как в [1] можно показать, что

$$\varphi = |u_N|^\rho u_N, \qquad \int_0^1 (u_{ttxx} - u_{xxxx} - |u|^\rho u) w_j dx = \int_0^1 f w_j dx,$$

для любого фиксированного j . Отсюда , ввиду плотности "базиса" $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots$, имеем $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{tt} - u_{xx}) - |u|^\rho u = f(x,t)$ п.в. в Q. Теперь докажем , что решения задачи (1) -(3) единственно. Пусть u и v - два решения задачи (1) -(3), тогда для разности w = u - v имеем:

$$w_{ttxx} - w_{xxxx} = |v|^\rho v - |u|^\rho u \qquad (17)$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad w(0,t) = w(1,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(1,t) = 0 \qquad (18)$$

Умножаем обе части равенства (17) на w_t; тогда получим следующие равенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (w_{tx}^2 + w_{xx}^2)dx = \int_0^1 (|v|^\rho v - |u|^\rho u) w_t dx \qquad (19)$$

Правая часть (19) по абсолютной величине не превосходит (см [1]. стр. 28) $C(\int_0^1 w^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 w_t^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. Тогда из (19) в силу (10) и леммы Гроноулла приходим к неравенству $\int_0^1 (w_{tx}^2 + w_{xx}^2)dx \leq 0$. Следовательно, w = 0 в Q. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично, как в [2] можно показывать пример, что условия теоремы являются существенными для единственности решения задачи (1)-(3).

Библиографический список

1.Ж.-Л.Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.Мир,1972 г.588 с.

2.М.О.Абулов.Краевая задача для одного нелинейного уравнения третьего порядка. Т. Труды международной конференции "Современные проблемы математической физики и информационных технологий".2005 г. 237-241 с.

3. Врагов В.А. Краев?е задача для неклассических уравнений математической физики. Новосибрск. НГУ. 1983.82с.

Содержание